Mathematik

Abiturprüfung 2024

Prüfungsteil B

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen als Hilfsmittel verwendet werden

- die vom Staatsministerium genehmigte Merkhilfe für das Fach Mathematik,
- eine der vom Staatsministerium zugelassenen stochastischen Tabellen,
- eine der vom Staatsministerium für Leistungserhebungen zugelassenen naturwissenschaftlichen Formelsammlungen,
- ein Taschenrechner, der den vom Staatsministerium getroffenen Regelungen entspricht.

Zu den Themengebieten Analysis, Stochastik und Geometrie wählt der Fachausschuss jeweils eine Aufgabengruppe zur Bearbeitung aus. **Die zu einer Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil A bearbeitet werden.**

____

Name des Prüflings

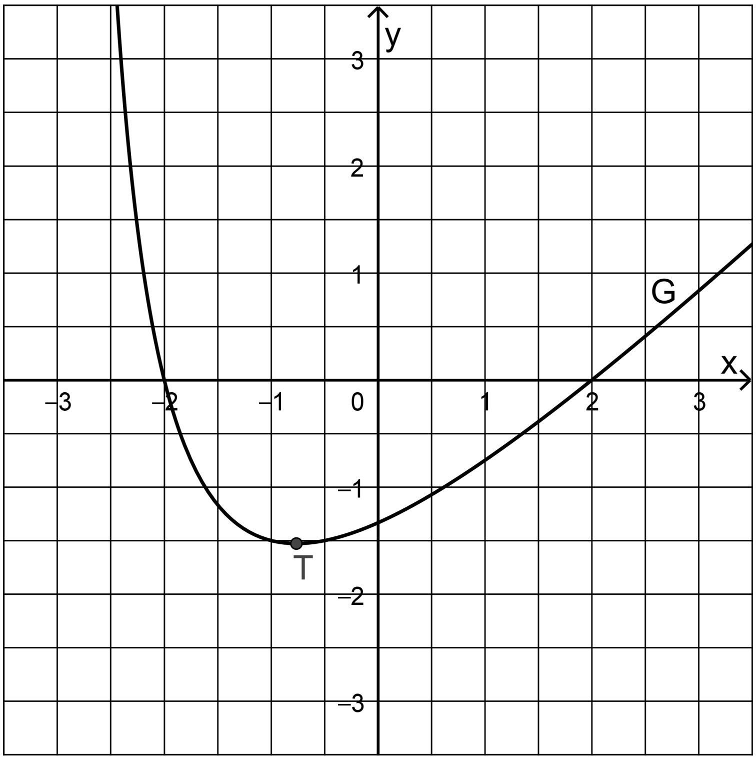
Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist abzugeben.

Analysis

Aufgabengruppe 1

BE

1 Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen G der in $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ definierten Funktion f mit $f(x) = x - 3 + \frac{5}{x+3}$. G hat genau einen Tiefpunkt T.



4 **a)** Die Geraden mit den Gleichungen $x = -3$ und $y = x - 3$ haben eine besondere Bedeutung für G. Zeichnen Sie die beiden Geraden in die Abbildung ein und geben Sie diese Bedeutung an. Geben Sie zudem die Koordinaten des Schnittpunkts der beiden Geraden an.

3 **b)** Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts von G mit der y-Achse. Begründen Sie anhand des gegebenen Terms von f, dass G für $x > -3$ oberhalb der Gerade mit der Gleichung $y = x - 3$ verläuft.

3 **c)** Weisen Sie nach, dass $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x+3}$ gilt, indem Sie den Term $x - 3 + \frac{5}{x+3}$ geeignet umformen, und begründen Sie, dass f genau die Nullstellen -2 und 2 hat.

5 **d)** Ermitteln Sie rechnerisch einen Term der ersten Ableitungsfunktion f' von f und berechnen Sie die x-Koordinate von T.

(Fortsetzung nächste Seite)

3 **e)** Ermitteln Sie anhand der Abbildung einen Näherungswert für das Integral $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$.

Betrachtet wird die in $]-3;+\infty[$ definierte Integralfunktion $J: x \mapsto \int_{-2}^{x} f(t)\,dt$.

6 **f)** Begründen Sie, dass die in $]-3;+\infty[$ definierte Funktion $F: x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5 \cdot \ln(x+3)$ für $x > -3$ eine Stammfunktion von f ist. Zeigen Sie damit, dass $\lim\limits_{x \to -3} J(x) = -\infty$ gilt, und deuten Sie diese Aussage geometrisch.

3 **g)** Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass J mindestens zwei Nullstellen besitzt.

2 Betrachtet wird die Schar der in $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ definierten Funktionen $f_k: x \mapsto \frac{x^2 - k}{x+3}$ mit $k \in \mathbb{R} \setminus \{9\}$. Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet. Die Funktion f aus Aufgabe 1 ist somit die Funktion f_4 dieser Schar.

4 **a)** Geben Sie die Anzahl der Nullstellen von f_k in Abhängigkeit von k an und begründen Sie, dass die Funktion f_0 der Schar eine Nullstelle ohne Vorzeichenwechsel hat.

Für die erste Ableitungsfunktion von f_k gilt $f_k'(x) = \frac{x^2 + 6x + k}{(x+3)^2}$.

2 **b)** Begründen Sie, dass G_k für $k > 9$ keine Extrempunkte besitzt.

Die Tangente an G_k im Punkt $(0 \mid f_k(0))$ wird mit t_k bezeichnet.

3 **c)** Zeigen Sie, dass t_k die Steigung $\frac{k}{9}$ hat, und bestimmen Sie denjenigen Wert von k, für den t_k senkrecht zur Gerade mit der Gleichung $y = x - 3$ steht.

4 **d)** Geben Sie eine Gleichung von t_k an und beurteilen Sie folgende Aussage:

Es gibt einen Punkt, der für alle $k \in \mathbb{R} \setminus \{9\}$ auf t_k liegt.

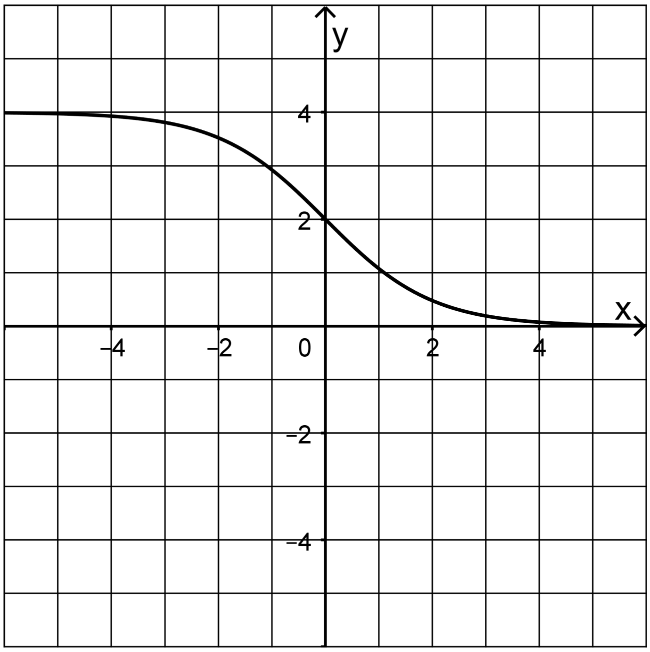
40

Analysis

Aufgabengruppe 2

BE

1 Die Abbildung zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $f: x \mapsto \frac{4}{1+e^x}$. Der Graph ist symmetrisch bezüglich seines Wendepunkts $(0|2)$.



3 **a)** Begründen Sie anhand des Funktionsterms von f, dass f keine Nullstelle hat, und geben Sie $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ sowie $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ an.

5 **b)** Berechnen Sie die mittlere Steigung des Graphen von f im Bereich $-1 \leq x \leq 1$ auf Hundertstel genau und bestimmen Sie grafisch die Steigung des Graphen von f in seinem Wendepunkt.

3 **c)** Für die in $\mathbb{R}$ definierte erste Ableitungsfunktion f' von f gilt $f'(-x) = f'(x)$. Geben Sie die Bedeutung dieser Tatsache im Hinblick auf den Verlauf des Graphen von f' an und skizzieren Sie in der Abbildung den Graphen von f'.

Betrachtet wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $F: x \mapsto 4x - 4 \cdot \ln\left(e^x + 1\right)$.

3 **d)** Zeigen Sie, dass die Funktion F eine Stammfunktion von f ist.

3 **e)** Beurteilen Sie die folgende Aussage:

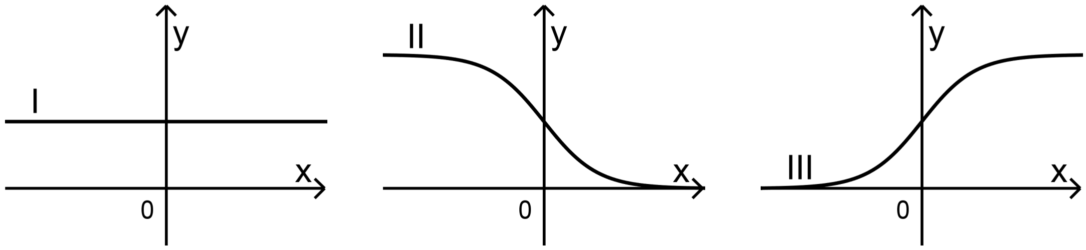
Der Graph von F verläuft vollständig unterhalb der x-Achse.

4 **f)** Begründen Sie, dass der Wert des Integrals $\int_{-k}^{k} f(x)\,dx$ für jede positive reelle Zahl k ohne Verwendung einer Stammfunktion von f exakt bestimmt werden kann, und geben Sie den Wert des Integrals an.

(Fortsetzung nächste Seite)

2 Betrachtet wird die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $w_{a;b;c}: x \mapsto \frac{a}{b+e^{cx}}$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$ und $c \in \mathbb{R}$. Die Funktion aus Aufgabe 1 ist eine Funktion dieser Schar.

4 **a)** Jeder der abgebildeten Graphen I, II und III der Schar gehört, bei festen Werten von a und b, zu einem der Werte $c = -1$, $c = 0$ und $c = 1$.



Ordnen Sie den Graphen die genannten Werte von c zu und begründen Sie Ihre Zuordnung.

Auf einer Inselgruppe wurden Seeadler neu angesiedelt. Betrachtet wird die anschließende Entwicklung der Anzahl der Seeadler. In einem Modell wird diese Entwicklung mithilfe des Graphen der Funktion $w_{40;1;-0,2}$ beschrieben, die im Folgenden mit w bezeichnet wird. Es gilt also $w(x) = \frac{40}{1+e^{-0,2x}}$. Dabei ist x die seit der Ansiedlung vergangene Zeit in Jahren und $w(x)$ die Anzahl der Seeadler.

4 **b)** Geben Sie auf Grundlage des Modells an, wie viele Seeadler angesiedelt wurden, und berechnen Sie, nach wie vielen Jahren die Anzahl der Seeadler auf 32 angewachsen ist.

3 **c)** Die Tangente an den Graphen von w im Punkt $(0 \mid w(0))$ hat die Steigung 2. Würde die Entwicklung der Anzahl der Seeadler im Modell mithilfe dieser Tangente beschrieben werden, so ergäbe sich für den Zeitpunkt vier Jahre nach der Ansiedlung eine bestimmte Anzahl von Seeadlern. Untersuchen Sie, ob diese Anzahl mit derjenigen übereinstimmt, die sich bei einer Beschreibung mithilfe des Graphen von w ergeben würde.

Unter bestimmten anderen Gegebenheiten auf der Inselgruppe kann die Entwicklung der Anzahl der Seeadler im Modell mithilfe des Graphen einer anderen Funktion aus der Schar der Funktionen $w_{a;b;c}$ beschrieben werden. Das folgende Gleichungssystem ermöglicht die Bestimmung der zugehörigen Werte von a, b und c.

(1) $\frac{a}{b+1} = 20$ (2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{a}{b+e^{cx}} = 45$ (3) $\frac{a}{b+e^{15c}} = 35$

3 **d)** Interpretieren Sie jede der drei Gleichungen im Sachzusammenhang.

5 **e)** Ermitteln Sie die Werte von a und b.

40

Stochastik

Aufgabengruppe 1

BE

1 In den letzten Jahren hat der Onlinehandel stark zugenommen. Dies zeigt sich auch in den Versandzentren der Paketdienstleister. Im Folgenden werden nur die im Zusammenhang mit dem Onlinehandel verschickten Pakete in einem dieser Versandzentren betrachtet. Ein Fünftel dieser Pakete sind Retouren, d. h. Pakete, die zurückgeschickte Waren enthalten.

3 **a)** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 200 zufällig ausgewählten Paketen mehr als ein Viertel Retouren sind.

3 **b)** Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Zufallsexperiment, bei dem die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses mit dem Term

$1-\sum_{i=0}^{8}\binom{30}{i}\cdot 0{,}2^{i}\cdot 0{,}8^{30-i}$ berechnet werden kann, und geben Sie dieses

Ereignis an.

4 **c)** Ermitteln Sie, wie viele Pakete mindestens zufällig ausgewählt werden müssen, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass darunter mindestens eine Retoure ist, größer als 90 % ist.

5 **d)** 49 % der Pakete enthalten Kleidung. Von den Paketen, bei denen es sich um Retouren handelt, enthalten 91 % Kleidung.

Es wird ein Paket zufällig ausgewählt. Betrachtet werden folgende Ereignisse:

R: „Bei dem Paket handelt es sich um eine Retoure."

K: „Das Paket enthält Kleidung."

Stellen Sie den beschriebenen Sachverhalt in einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel dar. Bestimmen Sie für den Fall, dass das ausgewählte Paket keine Retoure ist, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Paket Kleidung enthält.

Aus einer Transportkiste mit 25 Paketen, unter denen sechs Retouren sind, werden nacheinander zehn Pakete zufällig entnommen und an eine Prüfstelle weitergeleitet.

2 **e)** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die ersten beiden Pakete Retouren sind.

4 **f)** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei oder drei Retouren entnommen werden.

(Fortsetzung nächste Seite)

4 **2** Die Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße X, die nur die Werte 1, 2, 3, 4 und 5 annehmen kann.

k	1	2	3	4	5
$P(X=k)$	p_1	p_2	p_3	0,2	0,15

Die Wahrscheinlichkeiten $P(X=4)$ und $P(X=5)$ sowie der Erwartungswert und die Varianz von X sind bekannt. Aus diesen Informationen ergibt sich das folgende Gleichungssystem, mit dem die fehlenden Wahrscheinlichkeiten p_1, p_2 und p_3 berechnet werden können.

I $\quad p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}65$

II $\quad p_1 + 2p_2 + 3p_3 = 1{,}45$

III $\quad 4p_1 + p_2 = 0{,}6$

Ermitteln Sie, ohne das Gleichungssystem zu lösen, welche Werte für den Erwartungswert und die Varianz von X beim Aufstellen des Gleichungssystems verwendet worden sind.

25

Stochastik

Aufgabengruppe 2

BE

Ein bekannter Video-Streamingdienst bietet einen kostenpflichtigen Zugang zu Spielfilmen und Serien an. Personen, die davon gegen Zahlung einer monatlichen Gebühr Gebrauch machen, werden im Folgenden als Abonnenten bezeichnet. Sie haben sich entweder für das Spielfilmpaket oder für das Komplettpaket entschieden, das neben den Spielfilmen auch noch Serien enthält.

1 Unter den Abonnenten sind 70 % höchstens 40 Jahre alt. Von diesen haben 80 % das Komplettpaket gewählt. Unter denjenigen Abonnenten, die älter als 40 Jahre sind, haben sich 50 % für das Komplettpaket entschieden.

3 **a)** Stellen Sie den Sachverhalt in einem beschrifteten Baumdiagramm dar.

3 **b)** Eine unter allen Abonnenten zufällig ausgewählte Person hat sich für das Komplettpaket entschieden. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie höchstens 40 Jahre alt ist.

4 **c)** Bestimmen Sie die Anzahl der Abonnenten, die man mindestens zufällig auswählen müsste, damit unter ihnen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % mindestens eine Person älter als 40 Jahre ist.

2 Der Anteil der zufriedenen Abonnenten von derzeit 60 % soll gesteigert werden. Dazu wird ein Algorithmus entwickelt, der jedem Abonnenten täglich individuell einen Spielfilm vorschlägt. Als Basis für die Entscheidung über den dauerhaften Einsatz des Algorithmus plant das Management einen Probebetrieb. Im Anschluss soll die Nullhypothese „Der Anteil der zufriedenen Abonnenten beträgt höchstens 60 %." mithilfe einer Stichprobe von 200 zufällig ausgewählten Abonnenten auf einem Signifikanzniveau von 5 % getestet werden.

2 **a)** Geben Sie an, welche Überlegung des Managements zur Wahl dieser Nullhypothese geführt haben könnte.

(Fortsetzung nächste Seite)

Für den beschriebenen Test ergibt sich $\{132;133;\ldots;200\}$ als Ablehnungsbereich der Nullhypothese.

4 **b)** Zur Bestimmung der unteren Grenze dieses Ablehnungsbereichs wurden zunächst folgende Lösungsschritte ausgeführt:

- Y: Anzahl der zufriedenen Abonnenten in der Stichprobe
- $P_{0,6}^{200}(Y \geq 132) \approx 0{,}047$

Begründen Sie, dass die beiden Lösungsschritte zur Bestimmung der unteren Grenze nicht ausreichend sind, und ergänzen Sie diese geeignet.

4 **c)** Weisen Sie nach, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler zweiter Art bei diesem Ablehnungsbereich der Nullhypothese mehr als 50 % betragen könnte.

3 Zur Anmeldung auf der Webseite des Streamingdiensts ist ein persönliches Kennwort erforderlich. Für das Kennwort können 80 verschiedene Zeichen verwendet werden: je 26 Groß- und Kleinbuchstaben, 10 Ziffern sowie 18 Sonderzeichen.

2 **a)** Einige Abonnenten verwenden ein Kennwort, das genau acht Zeichen lang ist und nur aus Kleinbuchstaben besteht. Dabei können Zeichen mehrfach vorkommen. Zeigen Sie, dass für diese Abonnenten weniger als ein Tausendstel aller möglichen Kennwörter infrage kommen, die aus genau acht Zeichen bestehen.

3 **b)** Niclas beschließt, ein Kennwort zu wählen, das die beiden folgenden Bedingungen erfüllt:

- Es besteht aus genau acht Zeichen, die untereinander verschieden sind.
- Die Buchstaben seines Namens sind in der korrekten Reihenfolge und unter Berücksichtigung der Groß- und Kleinschreibung enthalten.

Damit sind beispielsweise *Nic4+las* oder *nNicl*as* mögliche Kennwörter. Bestimmen Sie die Anzahl aller derartigen Kennwörter.

25

Geometrie

Aufgabengruppe 1

BE

Gegeben sind die Punkte $A(8|0|6)$, $B(7|1|6)$ und $S(0|0|10)$, die in der Ebene E liegen.

3 **a)** Berechnen Sie die Länge der Strecke $[AB]$ und geben Sie die besondere Lage dieser Strecke im Koordinatensystem an.

(zur Kontrolle: $\overline{AB} = \sqrt{2}$)

3 **b)** Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform.

(zur Kontrolle: $E: x_1 + x_2 + 2x_3 - 20 = 0$)

Betrachtet werden die Schar der Geraden $g_k : \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1+k \\ 1-k \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{R}$ sowie der Punkt $C(9|1|5)$.

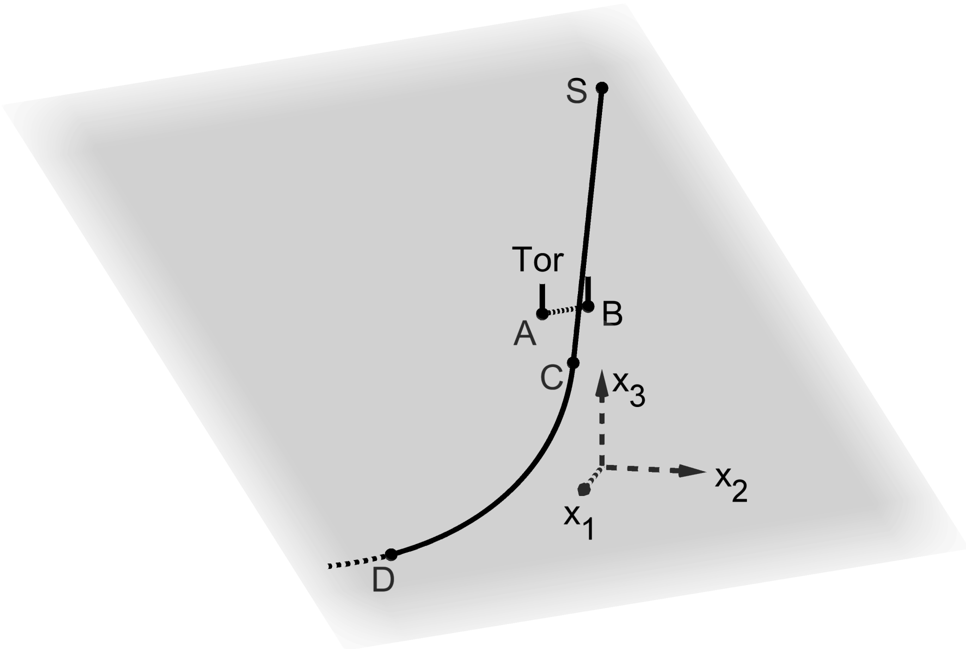
4 **c)** Begründen Sie, dass jede Gerade der Schar in E liegt, und bestimmen Sie denjenigen Wert k, für den der Punkt C auf g_k liegt.

(zur Kontrolle: $k = 0{,}8$)

5 **d)** Begründen Sie, dass die Größe des Schnittwinkels von g_k und der x_1x_2-Ebene weniger als 30° beträgt, wenn $2k^2 > 1$ gilt.

Eine Skifahrerin fährt einen Hang hinab. Dieser wird modellhaft durch ein Flächenstück beschrieben, das in der Ebene E liegt. Die Startposition der Abfahrt entspricht dem Punkt S. Auf dem Hang befindet sich ein Tor, dessen Begrenzungsstangen im Modell an den Punkten A und B stehen. Von ihrer Startposition fährt die Skifahrerin zunächst entlang einer geraden Fahrlinie bis zu einer Stelle unterhalb des Tors, die dem Punkt C entspricht (vgl. Abbildung).

(Fortsetzung nächste Seite)



Die gerade Fahrlinie liegt dabei im Modell auf der Gerade

$g_{0,8}: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1{,}8 \\ 0{,}2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Die x_1x_2-Ebene beschreibt die Horizontale; eine

Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 5 Metern in der Realität.

3 **e)** Geben Sie mithilfe des Ergebnisses aus Aufgabe a die Breite des Tors auf Meter genau an. Begründen Sie mithilfe der Aussage aus Aufgabe d, dass die gerade Fahrlinie der Skifahrerin um weniger als 30° gegenüber der Horizontalen geneigt ist.

4 **f)** Begründen Sie rechnerisch, dass die Skifahrerin das Tor tatsächlich durchquert.

3 **g)** An der Stelle, die im Modell dem Punkt C entspricht, wird die Fahrlinie der Skifahrerin ohne Knick durch eine kreisbogenförmige Kurve fortgesetzt. Während der Fahrt entlang dieser Kurve erreicht die Skifahrerin eine Stelle, die dem Punkt $D(18 \mid -2 \mid 2)$ entspricht.

Der Kreisbogen, der diese Kurve beschreibt, ist Teil eines Kreises mit Mittelpunkt $M(m_1 \mid m_2 \mid m_3)$. Die Koordinaten von M können mit folgendem Gleichungssystem ermittelt werden.

I $\quad m_1 + m_2 + 2m_3 - 20 = 0$

II $\quad \begin{pmatrix} m_1 - 9 \\ m_2 - 1 \\ m_3 - 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1{,}8 \\ 0{,}2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

III $\quad \sqrt{(m_1 - 9)^2 + (m_2 - 1)^2 + (m_3 - 5)^2} = \sqrt{(m_1 - 18)^2 + (m_2 + 2)^2 + (m_3 - 2)^2}$

Erläutern Sie die geometrischen Überlegungen, die den Gleichungen I, II und III zugrunde liegen.

25

Geometrie

Aufgabengruppe 2

BE

Abbildung 1 zeigt die Pyramide ABCDS mit den Eckpunkten $A(-3|-3|0)$, $B(3|-3|0)$, $C(3|3|0)$, $D(-3|3|0)$ und $S(0|0|4)$ sowie den Punkt $O(0|0|0)$, der in der quadratischen Grundfläche der Pyramide liegt. Die Seitenfläche CDS der Pyramide liegt in der Ebene E.

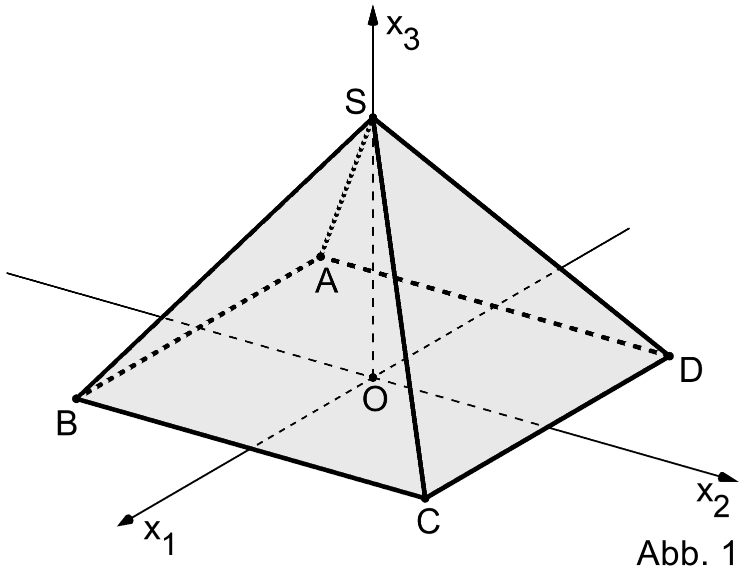


Abb. 1

4 **a)** Berechnen Sie den Inhalt der Oberfläche der Pyramide.

3 **b)** Genau eine der folgenden Gleichungen (1) bis (3) beschreibt eine Symmetrieebene der Pyramide. Geben Sie diese Gleichung an und begründen Sie für eine der anderen Gleichungen, dass die durch sie beschriebene Ebene keine Symmetrieebene der Pyramide ist.

(1) $x_1 - x_3 = 0$ (2) $x_1 + x_2 + x_3 = 4$ (3) $x_1 + x_2 = 0$

3 **c)** Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform.

(zur Kontrolle: $4x_2 + 3x_3 - 12 = 0$)

5 **d)** Es gibt einen Punkt $P(0|0|p)$, der im Innern der Pyramide liegt und von allen vier Seitenflächen sowie der Grundfläche der Pyramide den gleichen Abstand hat. Mithilfe des folgenden Gleichungssystems lässt sich der Wert von p bestimmen:

$$\text{I} \quad \vec{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{II} \quad 4 \cdot 4t + 3 \cdot (p + 3t) - 12 = 0 \qquad \text{III} \quad \left|\overrightarrow{PQ}\right| = p$$

Erläutern Sie die Überlegungen im geometrischen Zusammenhang, die diesem Vorgehen zur Bestimmung des Werts von p zugrunde liegen.

(Fortsetzung nächste Seite)

Die Ebene E gehört zur Schar der Ebenen

$E_k: 4k \cdot x_1 + 4\sqrt{1-k^2} \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 - 12 = 0$ mit $k \in [-1;1]$.

Die Seitenfläche ADS der Pyramide liegt in der Ebene E_{-1} der Schar, die Seitenfläche BCS in der Ebene E_1.

1 **e)** Zeigen Sie, dass der Punkt S in allen Ebenen der Schar enthalten ist.

4 **f)** Weisen Sie nach, dass die Größe des Winkels, unter dem die Gerade OS die Ebene E_k schneidet, unabhängig von k ist.

Jede Ebene E_k der Schar schneidet die x_1x_2-Ebene in einer Gerade g_k. Mit R_k wird jeweils derjenige Punkt auf g_k bezeichnet, der von O den kleinsten Abstand hat. In Abbildung 2 sind g_k und R_k beispielhaft für eine Ebene E_k der Schar dargestellt.

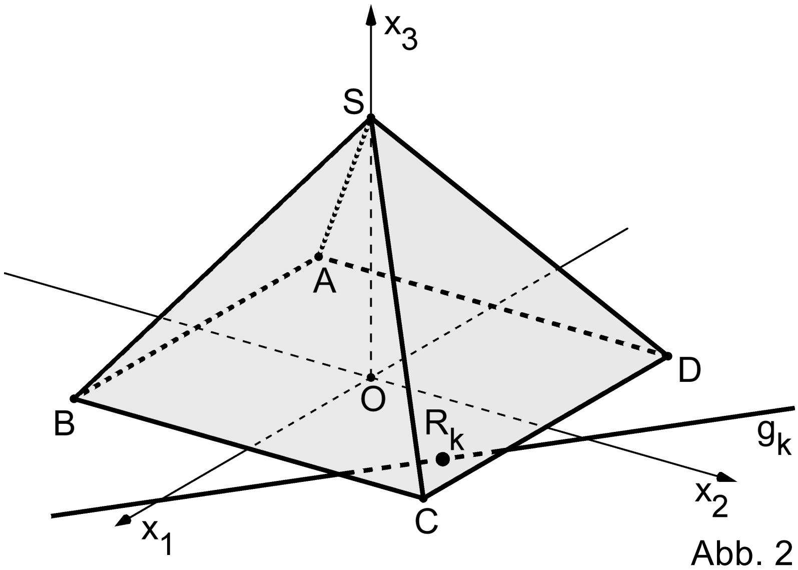


Abb. 2

2 **g)** Zeichnen Sie die Punkte R_{-1} und R_1 in Abbildung 2 ein.

3 **h)** Durchläuft k alle Werte von -1 bis 1, dann dreht sich das Dreieck OR_kS um die Strecke $[OS]$. Dabei entsteht ein Körper. Beschreiben Sie die Form des entstehenden Körpers und bestimmen Sie das Volumen dieses Körpers.

25